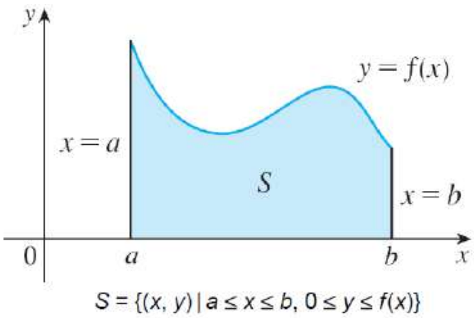
INTEGRAIS DEFINIDAS

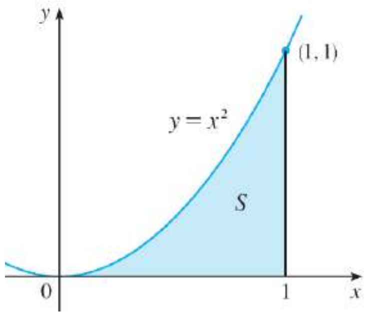
O Problema da Área

Como determinar a área da região S que está sob a curva $y = f(x)$ e limitada pelas retas verticais $x = a$, $x = b$ e pelo eixo x?

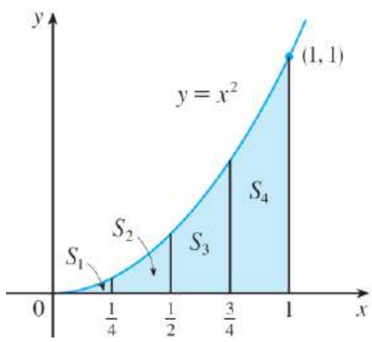


Uma ideia é aproximarmos a região S utilizando retângulos e depois tomarmos o limite das áreas desses retângulos à medida que aumentamos o número de retângulos (semelhante a definição de reta tangente em que a aproximação é feita por retas secantes e então tomamos o limite dessas aproximações).

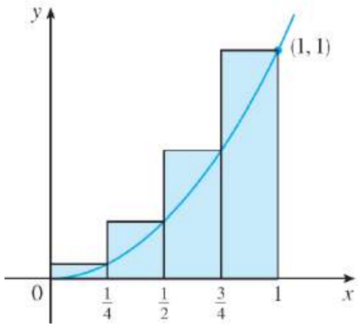
Exemplo: Use retângulos para estimar a área sob a parábola $y = x^2$ no intervalo [0, 1].



Observe que a área de S deve estar entre 0 e 1, pois S está contida em um quadrado com lados de comprimento 1. Suponha que S seja dividida em quatro faixas S_1, S_2, S_3, e S_4:



Aproximando cada faixa por um retângulo com base igual à largura da faixa e alturas definidas pelo valor da função $f(x) = x^2$ nas extremidades direitas dos subintervalo, temos:

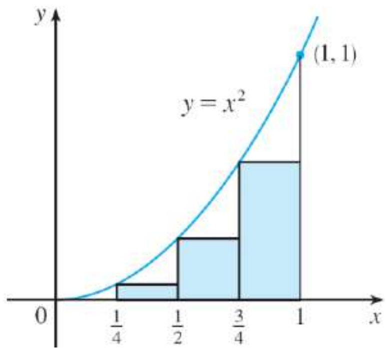


Se R_4 for a soma das áreas dos retângulos aproximados, teremos:

$$R_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 = \frac{15}{32} = 0{,}46875$$

Observe que a área A da região S é menor que R_4, ou seja, A < 0,46875.

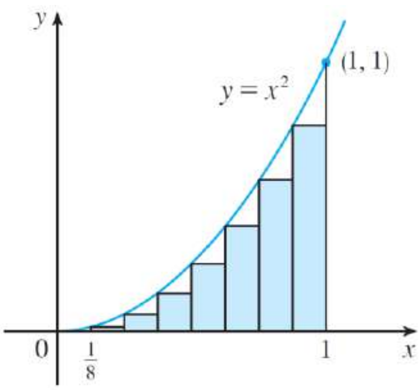
Também poderíamos usar os retângulos menores para aproximar a área de S. Neste caso, as alturas assumiriam os valores de *f* nas extremidades esquerdas dos subintervalos.

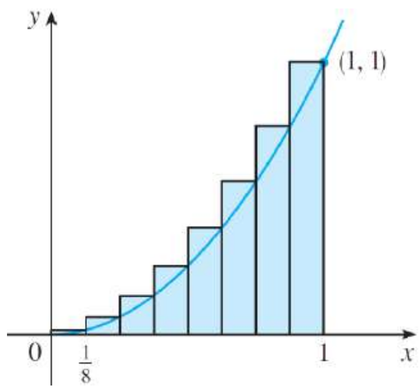


A soma das áreas desses retângulos é:

$$L_4 = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0{,}21875$$

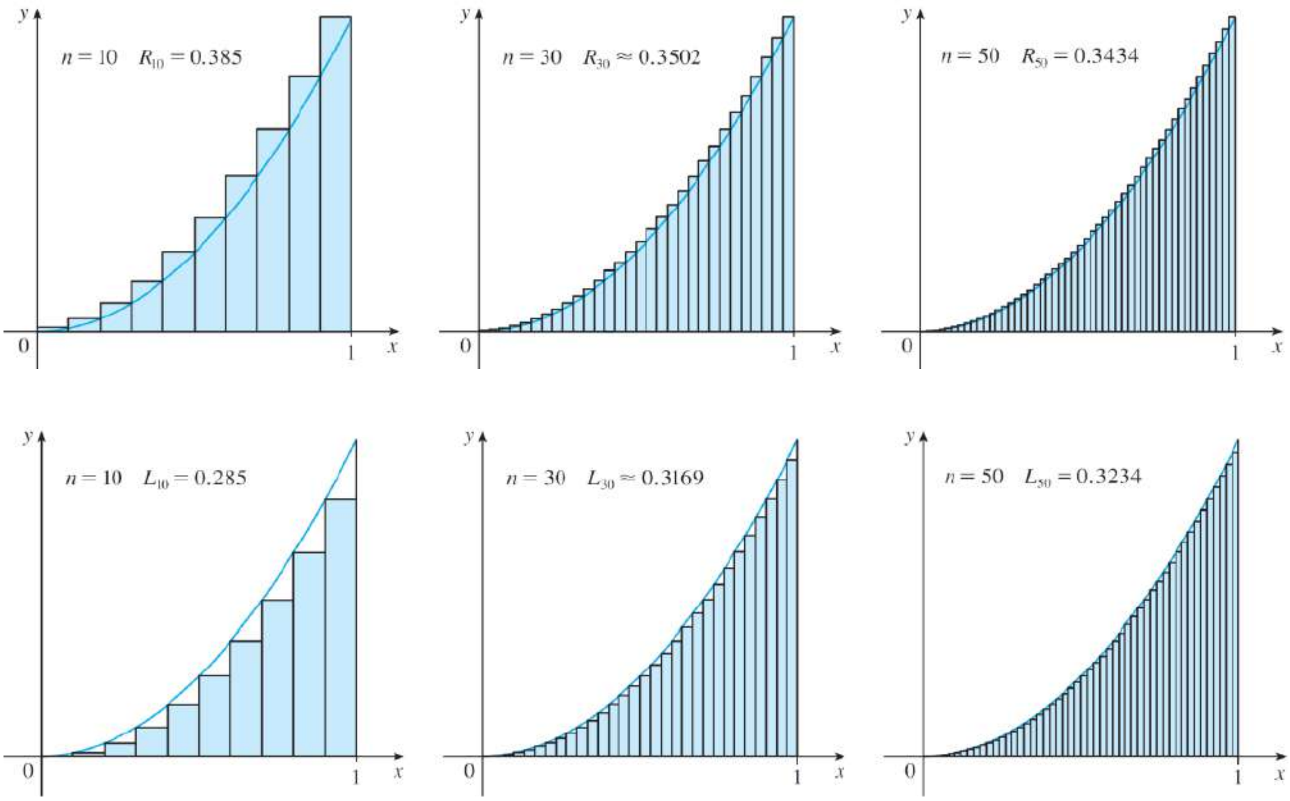
Desta forma: 0,21875 < A < 0,46875. Repetindo esse procedimento com um número maior de faixas, por exemplo, S dividida em oito faixas com a mesma largura:





L_8 = 0,2734375 < A < 0,3984375 = R_8

Usando n retângulos cujas alturas são encontradas com as extremidades esquerdas (L_n) ou com as extremidades direitas (R_n), ambos, L_n e R_n se tornam aproximações cada vez mais próximas e melhores à área de S.

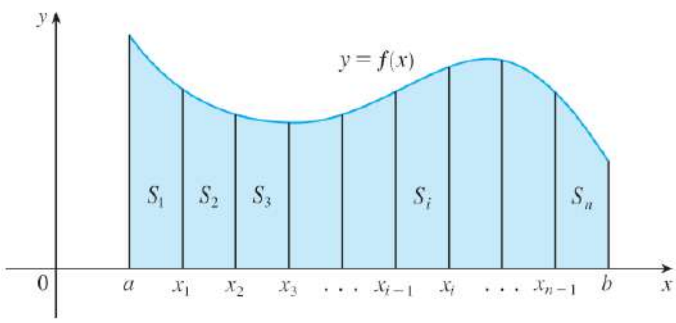


Em particular, vemos que usando 50 faixas a área está entre 0,3234 e 0,3434. Com 100 faixas a área está entre 0,3283500 e 0,3383500 e, com 1.000 faixas A está entre 0,3328335 e 0,3338335. Fazendo uma estimativa, temos que: A ≈ 0,3333335.

Portanto, definimos a área A como o limite das somas das áreas desses retângulos. Isto é:

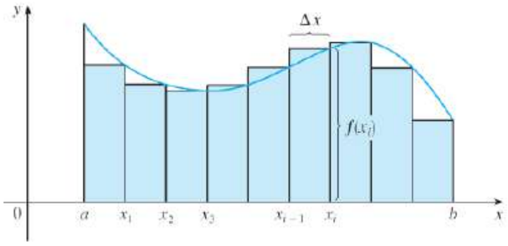
$$A = \lim_{n\to\infty} \mathrm{R_n} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{L_n} = \frac{1}{3}$$

Desta forma, para definir a área de uma figura plana qualquer S, delimitada pelo gráfico de uma função contínua não negativa f, pelo eixo x e por suas retas $x = a$ e $x = b$, começamos por subdividir S em n faixas S_1, S_2, …, S_n de igual largura.



A largura do intervalo $[a, b]$ é $b - a$, assim, a largura de cada uma das n faixas é: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

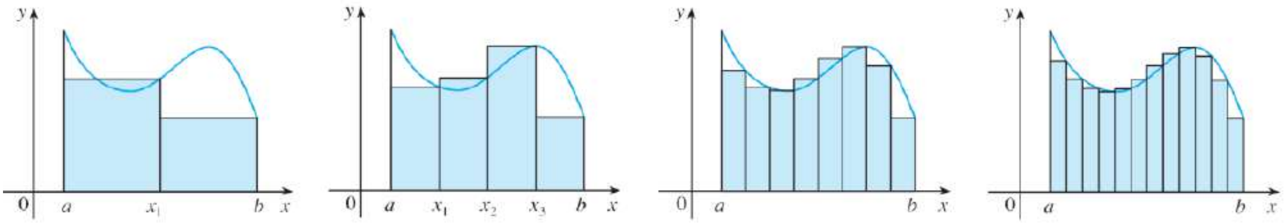
Essas faixas dividem o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, em que $x_0 = a$ e $x_n = b$. Aproximando a i-ésima faixa S_i por um retângulo com largura Δx e altura $f(x_i)$, a área do i-ésimo retângulo é $f(x_i)\,\Delta x$.



A área aproximada de S é obtida pela soma das áreas desses retângulos, que é

$$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \ldots + f(x_n)\,\Delta x$$

À medida que o número de faixas aumenta, isto é, quando $n \to \infty$, a aproximação da área fica melhor.



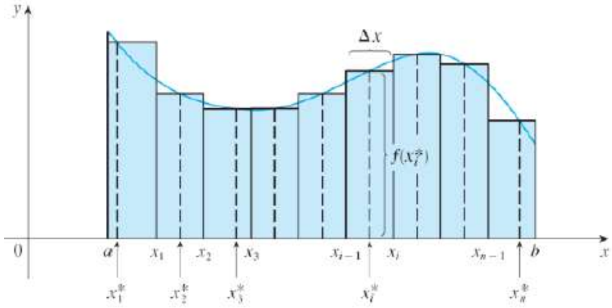
(a) $n = 2$ (b) $n = 4$ (c) $n = 8$ (d) $n = 12$

Definição 1

A área da região S que está sob o gráfico de uma função contínua f é o limite da soma das áreas dos retângulos:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}[f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \ldots + f(x_n)\,\Delta x]$$

Em vez de usarmos as extremidades dos retângulos, podemos tomar a altura do i -ésimo retângulo como o valor de f em qualquer número x_i^* no i –ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.



Logo, uma expressão mais geral para a área S é:

$$A = \lim_{n\to\infty}[f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \ldots + f(x_n^*)\,\Delta x] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Integral Definida

Definição 2

Se $f(x)$ uma função definida e contínua no intervalo real $[a, b]$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais Δx. Seja $x_{i-1} \leq x_i^* \leq x_i$, $i = 1, ..., n$. Então, a integral definida de f, de **a** até **b** é

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\, \Delta x$$

Se o limite existe, dizemos que f é integrável em $[a, b]$.

Observações:

- ✓ Na notação $\int_a^b f(x)\, dx$, a é o limite inferior de integração, b é o limite superior de integração e $f(x)$ é o integrando.
- ✓ A integral definida é um número.
- ✓ A soma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\, \Delta x$ é chamada soma de Riemann, em homenagem ao matemático Bernhard Riemann (1826-1866).
- ✓ Quando f é contínua e não negativa em $[a, b]$ a definição de integral definida coincide com a definição de área (definição 1). Assim, **a integral definida é a área da região sob o gráfico de *f* de *a* até *b***.

Teorema:

Se f é contínua em $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.

Propriedades da integral definida

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções integráveis em $[a, b]$.

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$

2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,\ a < c < b.$

4. Para todo x em $[a, b]$, se $f(x) \geq 0$, então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

5. Para todo x em $[a, b]$, se $f(x) \geq g(x)$, então $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

6. Se $a > b$, então $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

7. Se $a = b$, então $\int_a^a f(x)dx = 0$.

O teorema fundamental do cálculo nos permite relacionar as operações de derivação e integração.

Teorema Fundamental do Cálculo

Se $f(x)$ é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e $F'(x) = f(x)$, então:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

Exemplos:

a. $\int_1^3 x^2 dx$

b. $\int_0^{\pi/4} \cos x \; dx$

c. $\int_0^1 (2x^3 - x^2 + 1) \; dx$

d. $\int_0^2 e^x dx$

Mudança de variáveis para integrais definidas

Existem duas maneiras para calcular a integral definida utilizando o método da substituição. Uma delas consiste em calcular a integral indefinida e então utilizar o teorema fundamental do cálculo. A outra maneira consiste em recalcular os limites de integração ao fazer a mudança de variável.

Exemplos:

a. $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$

b. $\int_0^2 2x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

Exercícios

1 – Calcular as seguintes integrais:

$a)\ \int_1^2 (6x-1)dx$

$b)\ \int_1^2 (x^2-3x+2)dx$

$c)\ \int_1^2 (3x+2)^2\,dx$

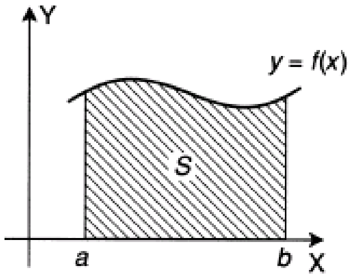
$d)\ \int_{-1}^2 (x+x^4)dx$

$e)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}\,dx$

$f)\ \int_0^4 (2x+1)^{-1/2}\,dx$

Cálculo de áreas

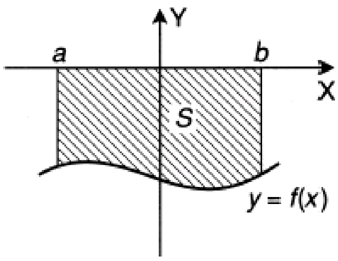
Caso I. Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de *f*, pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo *x*, em que *f* é contínua e $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$.



Neste caso, a área é dada por:

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)dx}$$

Caso II. Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de *f*, pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo *x*, em que *f* é contínua e $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [a, b]$.



Neste caso, a área é dada por:

$$\boxed{A = \left| \int_a^b f(x)dx \right|}$$

Exemplos:

1) Encontre a área da região limitada pela curva $y = 2x + 1$, pelo eixo *x* e pelas retas $x = 1$ e $x = 3$.

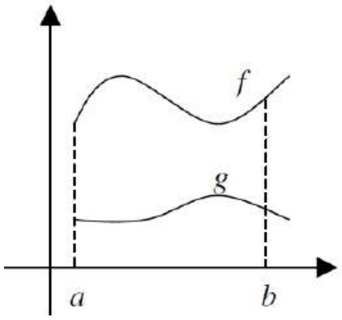
2) Encontre a área da região limitada pelo eixo x e pela função $f(x) = x^2 - 4x$ no intervalo [1, 3].

3) Encontre a área da região limitada por $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ no intervalo [–2, 3].

Caso III – Área de regiões entre curvas

A área da região é limitada pelos gráficos de f e g e pelas retas x = a e x = b. As funções f e g são definidas e contínuas em [a, b] e $f(x) \geq g(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$.

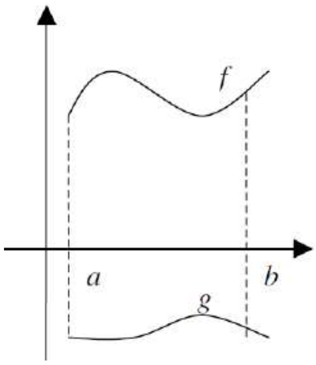
i) $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ e $f(x) \geq g(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$.



Neste caso, a área é dada por:

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx}$$

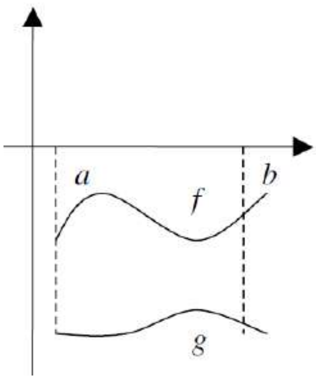
ii) $f(x) \geq 0$ e $g(x) \leq 0$ $\forall\, x \in [a,b]$.



Neste caso, a área é dada por:

$$A = \int_a^b f(x)dx + \left[-\int_a^b g(x)dx \right] =$$
$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

iii) $f(x) \leq 0$, $g(x) \leq 0$ e $f(x) \geq g(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$.



Neste caso, a área é dada por:

$$A = -\int_a^b g(x)dx - \left[-\int_a^b f(x)dx \right] =$$
$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Exemplos:

1) Encontre a área limitada pelas curvas $f(x) = -x^2 + 4x$ e $g(x) = x^2$.

2) Encontre a área limitada pelas curvas $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x + 1$.

3) Encontre a área limitada pelas curvas $f(x) = x^3$ e $g(x) = x$.

4) Encontre a área limitada pelas curvas $y^2 = 2x - 2$ e $y = x - 5$

5) Encontre a área limitada pelas curvas $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = \cos(x)$, $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{9\pi}{4}$

Exercícios

1 – Encontre a área da região limitada pelas curvas dadas:

a) $x = ½$; $x = \sqrt{y}$; $y = -x + 2$ Resp. 1/3

b) $y = 5 - x^2$; $y = x + 3$ Resp. 9/2

c) $x + y = 3$; $y + x^2 = 3$ Resp. 1/6

d) $x = y^2$, $y - x = 2$, $y = -2$ e $y = 3$; A= 115/6

e) $y = \text{sen}(x)$ e $y = -\text{sen}(x)$; $x \in [0, 2\pi]$ Resp. 8

f) $y = 1 - x^2$; $y = -3$ Resp. 32/3

g) $y = 1/6x^2$; $y = 6$ Resp. 48

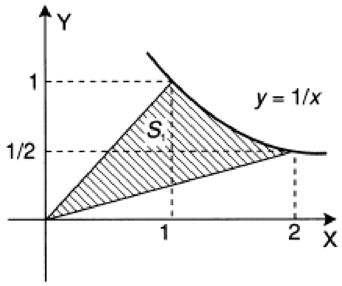
h) $y = \cos(x)$; $y = -\cos(x)$; $x \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ Resp. 8

i) $y = e^x$; $x = 0$; $x = 1$; $y = 0$ Resp. $e - 1$

j) $y = \ln x$; $y = 0$; $x = 4$ Resp. 8ln2 – 3

k) $y = 4 - x^2$; $y = x^2 - 14$ Resp. 72

2 – Encontrar as área da região S_1 :



Teorema do valor médio para integrais

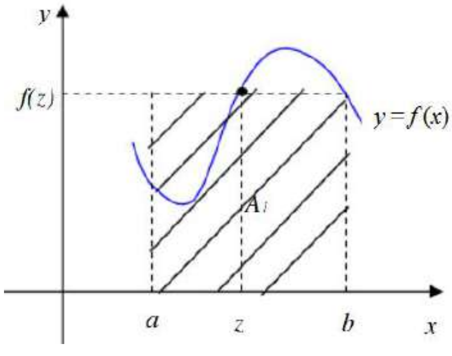
Se f é uma função contínua em $[a, b]$, existe um ponto $\boldsymbol{z}$ entre a e b tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a).f(z)$$

ou seja, existe $\boldsymbol{z} \in$ [a, b] tal que $f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$

Interpretação geométrica

Se $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, então a área sob o gráfico de f é igual à área do retângulo de lados (b – a) e altura $f(z)$.



Observação: O valor médio de f em [a, b] é dado por $VM = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$

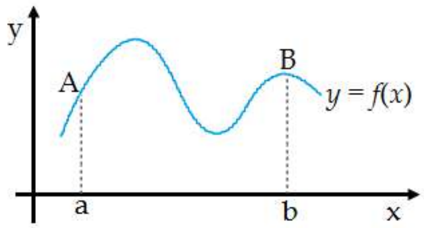
Exemplos

1. Um pesquisador estima que t horas depois da meia-noite, em um período típico de 24 horas, a temperatura (graus Celsius) em certa cidade é dada por $T(t) = 3 - \frac{2}{3}\,(t - 13)^2$, $0 \leq t \leq 24$. Qual é a temperatura média na cidade entre as 6:00 e 16:00 horas?

2. Encontre o valor médio de $f(x) = 3\sqrt{x+1}$ no intervalo $[-1,8]$ e determine o valor de z que corresponde ao valor médio de f.

Comprimento de arco de uma curva plana usando equações cartesianas

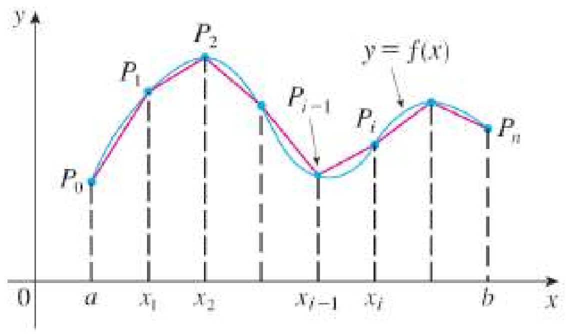
A representação gráfica de uma função $y = f(x)$ num intervalo [a, b] pode ser um segmento de reta ou uma curva qualquer. A porção de curva do ponto A(a, $f(a)$) ao ponto B(b, $f(b)$) é chamada *arco*.



Para encontrar o comprimento de uma curva, faremos uma aproximação por uma poligonal e, então, tomaremos o limite quando o número de segmentos da poligonal aumenta.

Seja uma curva C seja definida pela equação $y = f(x)$, em que f é contínua e a ≤ x ≤ b.

Obtemos uma poligonal de aproximação para C dividindo o intervalo [a,b] em n subintervalos com extremidades $x_0, x_1, ..., x_n$ e com larguras iguais a Δx. Se $y_i = f(x_i)$, então o ponto $P_i(x_i, y_i)$ está em C e a poligonal com vértices $P_0, P_1, ..., P_n$, é uma aproximação para C.



a aproximação fica melhor quando n aumenta.

Como a poligonal é formada por segmentos de reta, é possível calcular o comprimento de cada segmento. Desta forma, o comprimento da poligonal é calculado por:

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

Como f é derivável em [a,b], podemos aplicar o ***teorema do valor médio*** (para derivadas!!) em cada intervalo $[x_{i-1} - x_i]$, $i = 1, ...,n$ e descobrimos que existe um número x_i^* entre x_{i-1} e x_i tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

Substituindo este resultado na equação de L_n, temos:

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}))^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left(f'(x_i^*)\right)^2 (x_i - x_{i-1})^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 (1 + [f\,'(x_i^*)]^2)} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f\,'(x_i^*)]^2}\ (x_i - x_{i-1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f\,'(x_i^*)]^2}\ \Delta x_i$$

Quando $n \to \infty$, $\Delta x \to 0$ e L_n tende ao comprimento da curva C de a até b.

Definição:

Seja C uma curva de equação $y = f(x)$, em que f é uma função contínua e derivável em $[a, b]$. O comprimento de arco da curva C, do ponto A(a, $f(a)$) ao ponto B(b, $f(b)$) , denotado por $\boldsymbol{s}$, é dado por:

$$s = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f\,'(x_i^*)]^2}\ \Delta x_i$$

se este limite existir.

Como $f\,'(x)$ é contínua em $[a, b]$, o limite existe. Logo, pela definição de integral definida:

$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{1 + [f\,'(x)]^2}\, dx}$$

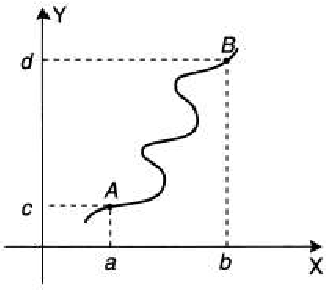
Exemplos:

1. Calcule o comprimento do arco da curva dada por $y = x^{3/2} - 4$ entre os pontos (1, -3) e (4, 4).

2. Calcule o comprimento do arco da parábola semicúbica $y^2 = x^3$ entre os pontos (1, 1) e (4, 8).

3. Determine o comprimento da curva $y = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}$ para $2 \leq x \leq 4$.

Se uma curva tem a equação $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$ e $g'(y)$ contínua, então, o comprimento do arco da curva C é dado por:



$$s = \int_{c}^{d} \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy$$

Exemplo:

1. Determine o comprimento do arco dado por $x = \frac{y^3}{2} + \frac{1}{6y} - 1$ para $1 \leq y \leq 3$.

Comprimento de arco de uma curva plana usando equações paramétricas

Para calcular o comprimento de arco de uma curva C dada na forma paramétrica, usamos as equações:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \qquad t \in [t_0, t_1]$$

em que $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são contínuas com derivadas contínuas e $x'(t) \neq 0$ para todo $t \in [t_0, t_1]$. Estas equações definem uma função $y = f(x)$, cuja derivada é dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

A partir de uma mudança de variáveis na equação $s = \int_a^b \sqrt{1 + [f\,'(x)]^2}\, dx$, calculamos o comprimento de arco de uma curva. Seja $x = x(t)$ e $dx = x'(t)dt$, obtermos:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f\,'(x)]^2}\, dx = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]^2}\; x'(t)dt$$

em que $x(t_0) = a$ e $x(t_1) = b$. Portanto, o comprimento de arco de uma curva C dada na forma paramétrica é dado por:

$$\boxed{s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\; dt}$$

Exemplo:

1. Calcule o comprimento do arco dado pela equação $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 \\ y = \frac{1}{2}t^2 \end{cases}, \; 0 \leq t \leq 2$

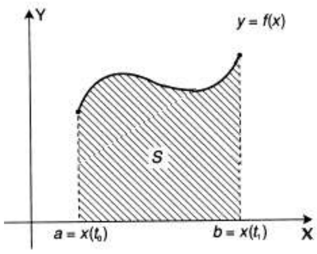
2. Determine o comprimento do arco da hipociclóide $\begin{cases} x = 2sen^3(t) \\ y = 2cos^3(t) \end{cases}$.

Área de uma região plana

O cálculo da área de uma região plana pode ser realizado quando as curvas que delimitam a região são dadas na forma paramétrica.

Caso I

A área da região S é limitada pelo gráfico de *f*, pelas retas x = a, x = b e pelo eixo x. A função $y = f(x)$ é contínua em [a, b] e $f(x) \geq 0$, $\forall\ x \in [a,b]$.



Neste caso, para $y = f(x)$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \qquad t \in [t_0, t_1]$$

em que $x(t_0) = a$ e $x(t_1) = b$.

Em coordenadas cartesianas, a área da região S é dada por $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx$. Fazendo a substituição $x = x(t)$ e $dx = x'(t)dt$ obtemos:

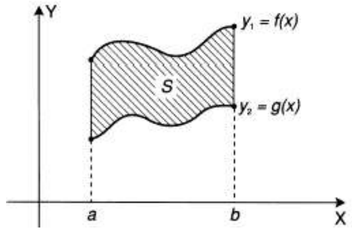
$$\boxed{A = \int_{t_0}^{t_1} y(t)\,x'(t)dt}$$

Exemplo:

1. Calcule a área da região limitada pela elipse $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3sen\ t \end{cases}$

Caso II

A área da região S é limitada pelos gráficos de f e g e pelas retas $x = a$ e $x = b$. As funções f e g são contínuas em [a, b] e $f(x) \geq g(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$.



Neste caso, para $y_1 = f(x)$

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ y_1 = y_1(t) \end{cases}, \qquad t \in [t_0, t_1]$$

e para $y_2 = g(x)$

$$\begin{cases} x_2 = x_2(t) \\ y_2 = y_2(t) \end{cases}, \qquad t \in [t_2, t_3]$$

em que $x_1(t_0) = x_2(t_2) = a$ e $x_1(t_1) = x_2(t_3) = b$.

Utilizando o resultado obtido para o cálculo de áreas de regiões entre curvas (em coordenadas cartesianas):

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Fazendo a substituição de variáveis, temos:

$$\boxed{A = \int_{t_0}^{t_1} y_1(t)\, x_1'(t)dt - \int_{t_2}^{t_3} y_2(t)\, x_2'(t)dt}$$

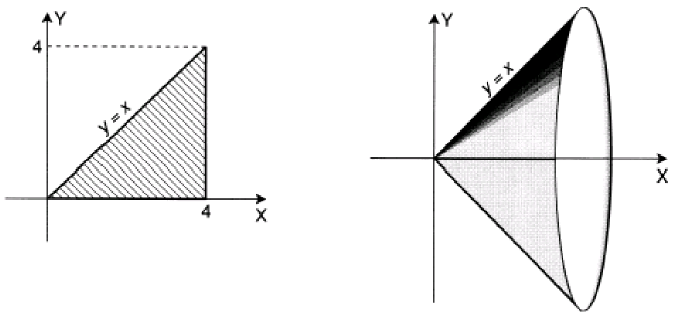
Exemplo:

1) Calcule a área entre as elipses $\begin{cases} x = \cos t \\ y = sen\ t \end{cases}$ e $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \frac{1}{2} sen\ t \end{cases}$

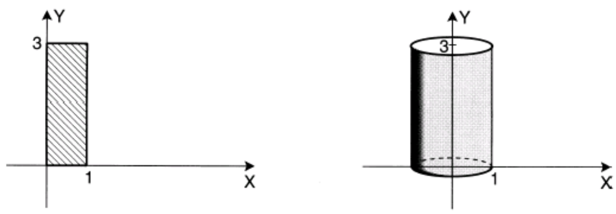
Volume de um sólido de revolução

Sólido de revolução é um sólido obtido com a rotação de uma região num plano em torno de uma reta, chamada de *eixo de revolução,* a qual pode ou não interceptar a região.

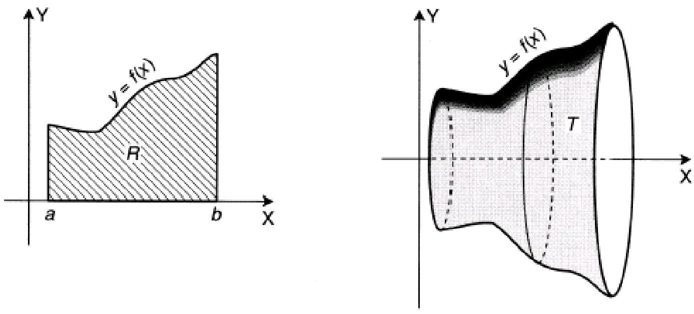
Se girarmos a região limitada pelas curvas $y = 0$, $y = x$ e $x = 4$ em torno do eixo x o sólido de revolução obtido é um cone.



Girando o retângulo limitado pelas retas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 3$ em torno de y, o sólido de revolução obtido é um cilindro.



Considere o problema de definir o volume do sólido T, gerado pela rotação da região plana R, em torno do eixo x.



Suponha que $f(x)$ é contínua e não negativa em $[a, b]$. Considere uma partição P de $[a, b]$, dada por $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$ e seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

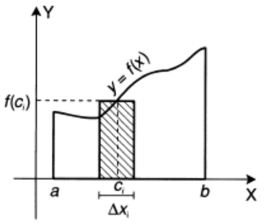
Em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, escolhemos um ponto qualquer c_i. Para cada i, $i = 1, ..., n$, construímos um retângulo R_i, de base Δx_i e altura $f(c_i)$. Fazendo cada retângulo R_i girar em torno do eixo x, o sólido de revolução obtido é um cilindro cujo volume é dado por $\pi\left[f(c_i)\right]^2.\Delta x_i$.

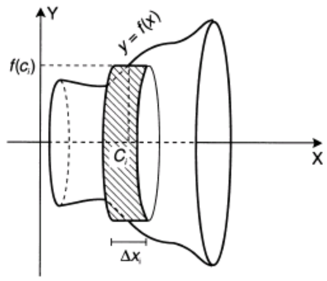
A soma dos volumes dos ***n*** cilindros nos dá uma aproximação do volume do sólido T. Esta soma é dada por:

$$V_n = \pi\left[f(c_1)\right]^2 \Delta x_1 + ... + \pi\left[f(c_n)\right]^2 \Delta x_n$$

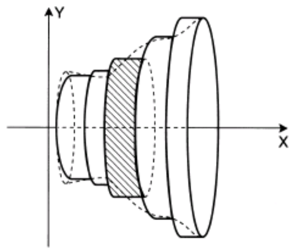
$$= \pi\sum_{i=1}^{n}\left[f(c_i)\right]^2 \Delta x_i$$

Representação gráfica:





Se $n \to \infty$, Δx_i, $i = 1, ..., n$, tornar-se muito pequeno e a soma dos volumes dos n cilindros (V_n) aproxima-se, intuitivamente, do volume do sólido T.



Definição:

Seja $y = f(x)$ uma função contínua não negativa em $[a, b]$ e R a região sob o gráfico de f de $\boldsymbol{a}$ até $\boldsymbol{b}$. O volume do sólido T, gerado pela revolução de R em torno do eixo x, é definido por

$$V = \lim_{n\to\infty} \pi \sum_{i=1}^{n} [f(c_i)]^2 \Delta x_i$$

se este limite existir.

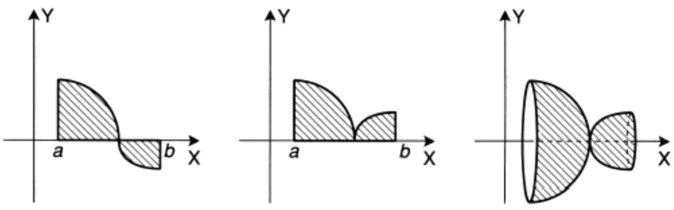
Como $f(x)$ é contínua em $[a, b]$, o limite existe. Logo, pela definição de integral definida:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx}$$

A fórmula do volume pode ser generalizada para outras situações:

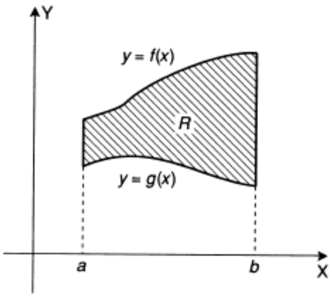
Caso I – A função $f(x)$ é negativa em alguns pontos de $[a, b]$

Como $|f(x)|^2 = (f(x))^2$, a fórmula permanece válida.



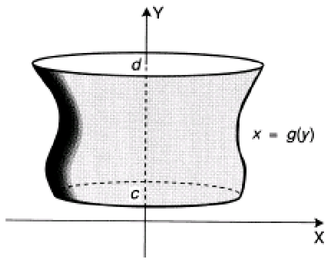
Caso II – A região R está entre gráficos de duas funções *f*(*x*) e *g*(*x*) de a até b

Supondo $f(x) \geq g(x),\ \forall x \in [a, b]$, o volume do sólido T, gerado pela rotação de R, é dado por:



$$V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) dx$$

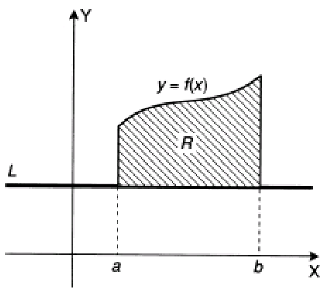
Caso III – A região R gira em torno do eixo dos *y*



$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

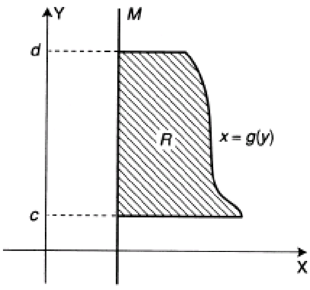
Caso IV – A rotação se efetua ao redor de uma reta paralela a um dos eixos coordenados

Se o eixo de revolução for a reta $y = L$, temos:



$$V = \pi \int_a^b [f(x) - L]^2 dx$$

Se o eixo de revolução for a reta $x = M$, temos:



$$V = \pi \int_c^d [g(y) - M]^2 dy$$

Exemplos:

1. A região R, limitada por $y = 1/4x^2$, pelo eixo dos x e as retas $x = 1$ e $x = 4$, gira em torno do eixo dos x. Encontrar o volume do sólido de revolução gerado.

2. Calcular o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos x, da região limitada pela parábola $y = ¼(13 – x^2)$ e pela reta $y = ½(x + 5)$.

3) Calcular o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos x, da região entre o gráfico de $y = \text{sen}(x)$ e o eixo dos x, de $-\pi/2$ até $3\pi/2$.

4) Determinar o volume do sólido obtido pela revolução da região limitada pela parábola cúbica $y = x^3$, pelo eixo y e pela reta $y = 8$, em torno do eixo dos y.

5) Determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = 4$, da região limitada por $y = 1/x$, $y = 4$ e $x = 4$.

6) Determinar o volume do sólido obtido pela revolução da região delimitada pela parábola $x = 1/2y^2 + 1$ e pelas retas $x = -1$, $y = 2$ e $y = -2$, em torno da reta $x = -1$.

7) Determinar o esboço da região R e o volume do sólido de revolução gerado pela rotação das regiões indicadas, ao redor dos eixos dados.

a) $y = \cos(x)$, $y = \text{sen}(x)$, $x = 0$, $x = \pi/4$; eixo-x. Resp. ($\pi/2$ u.v)

b) $y = x^3$ e $y = x^2$; eixo- y. Resp. ($\pi/10$ u.v)

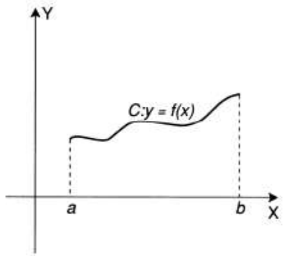
c) $y = 2x^2$; $x = 1$; $x = 2$; $y = 2$, ao redor de $y = 2$. Resp. ($152\pi/15$ u.v)

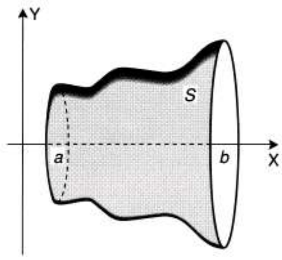
d) $y = \cos(x)$, $y = -2$, $x = 0$, $x = 2\pi$; ao redor da reta $y = -2$. Resp. ($9\pi^2$ u.v)

Área de uma superfície de revolução

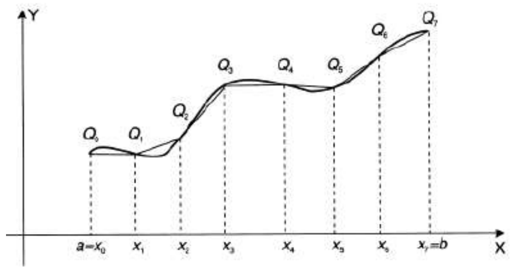
Quando uma curva plana gira em torno de uma reta no plano, obtemos uma superfície de revolução.

Seja a área da superfície de revolução S, obtida quando uma curva C, de equação $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ gira em torno do eixo x.

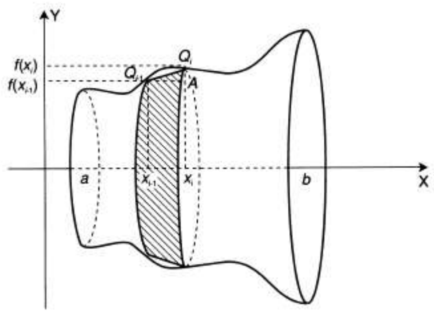




Suponha que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ e que f é uma função derivável em $[a, b]$. Dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de modo que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ obtemos $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ pontos pertencentes a curva C:



Fazendo cada segmento de reta desta linha poligonal girar em torno do eixo x, a superfície de revolução obtida é um tronco de cone.



Definição:

Seja C uma curva de equação $y = f(x)$, com f e f' contínuas em $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. A área da superfície de revolução S, gerada pela rotação da curva C ao redor do eixo x é dada por:

$$\boxed{A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}$$

Se considerarmos uma curva $x = g(y)$, $y \in [c, d]$ girando em torno do eixo y, a área da superfície de revolução é dada por:

$$\boxed{A = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy}$$

Exemplos:

1) Calcule a área da superfície de revolução obtida pela rotação, em torno do eixo x e da curva $y = 4\sqrt{x}, \frac{1}{4} \leq x \leq 4$.

2) Calcule a área da superfície de revolução obtida pela rotação, em torno do eixo y e da curva $x = y^3$, $0 \leq y \leq 1$.